PHÂN PHỐI T VÀ PHÉP KIỂM T STUDENT

13.1 Lịch sử của phân phối T Student.

Cha đẻ của phân phối T student là W.S Gosset. Ông được nhận làm việc tại hãng bia nổi tiếng Guinness ở Dublin, Ai len vào năm 1899 sau khi tốt nghiệp khoa Hóa tại Đại học Oxford lúc 23 tuổi. Để bảo đảm chất lượng bia khi lên men cần phải ước tính chính xác số lượng men (yeast) cần thêm vào, nếu thiếu sẽ làm giảm hương vị, nếu dư sẽ làm tăng vị đắng của bia, tuy nhiên không thể đếm được tổng thể các khúm men (colonies). Gosset đã lấy nhiều mẫu (samples) nhỏ con men và từ đó suy ta lượng men tổng thể (population). Công trình nghiên cứu này được công bố trên tờ Biometrica vào năm 1907 với tên giả là ***"Student"*** với tựa là "Sai số đếm với buồng đếm tế bào" (On the Error of Counting With a Hemacytometer). Vì vấn đề bảo mật của công ty nên ông chỉ được phép đăng bài với tên giả này. Sau đó ông thực hiện một nghiên cứu khác về phân phối T, Ông đo chiều cao (h) và chiều dài (l) ngón tay giữa trái của 3000 phạm nhân, ghi tất cả các số liệu này lên tấm bìa, cắt ngẫu nhiên ra 750 tấm bìa nhỏ, như vậy trong mỗi tấm bìa chỉ có số liệu h và l của 4 phạm nhân, tính trung bình m (mean) và phương sai s^2 (độ lệch chuẩn s) của tất cả 750 mẫu nhỏ này và suy đoán trung bình μ và độ lệch chuẩn σ của dân số (3000 phạm nhân). Công trình nổi tiếng này cũng được công bố trên tờ Biometrika vào năm 1908 với tên giả là ***"Student"*** và tựa là "Sai số có thể của trị trung bình" (The Probable Error of a Mean).


William Sealy Gosset 1908

Như vậy từ mẫu nhỏ (với trung bình m, độ lệch chuẩn s) ta có thể suy đoán trung bình μ và độ lệch chuẩn σ của dân số. Một ví dụ minh họa sau đây:

Chiều cao trung bình nam thanh niên Việt nam trên 18 tuổi là 163 cm và độ lệch chuẩn (SD) là 4 cm (Theo quyển hằng số sinh học của người Việt nam thập kỷ 90). Tạm gọi đây là trị trung bình μ và độ lệch chuẩn σ của dân số, thực ra trị số "thực" của μ và σ chỉ có được khi đo chiều cao của khoảng 30 triệu thanh niên nam này!.

Bây giờ ta thử suy đoán μ và σ sẽ như thế nào nếy ta rút ra 3 mẫu có N=5,10 và 20 thanh niên Việt nam bất kỳ và đo chiều cao các thanh niên trong các mẫu này. Kết quả chiều cao (cm) trình bày trong bảng 13.1

Bảng 13.1 Chiều cao thanh niên Việt nam với 3 mẫu bất kỳ

	N=5	**N=10**	**N=20**
	160	160	160
	165	165	165
	170	170	175
	155	155	155
	160	160	160
		150	150
		175	175
		160	160
		160	160
		175	175
			170
			155
			165
			155
			175
			160
			160
			165
			170
			170
mean	**162**	**163**	**164**
SD	**5.7**	**8.2**	**7.7**
SE	**2.5**	**2.7**	**1.7**
tα=0.05	**2.776**	**2.262**	**2.093**
KTC 95%	**6.940**	**6.107**	**3.558**
Dao động	**155-169**	**157-169**	**160-168**

mean: Trị trung bình; **SD:** độ lệch chuẩn, **SE:** sai số chuẩn, **tα**=0.05: giá trị tới hạn (2 đuôi); **KTC 95%**: khoảng tin cậy 95%

DF: Bậc tự do (n-1)

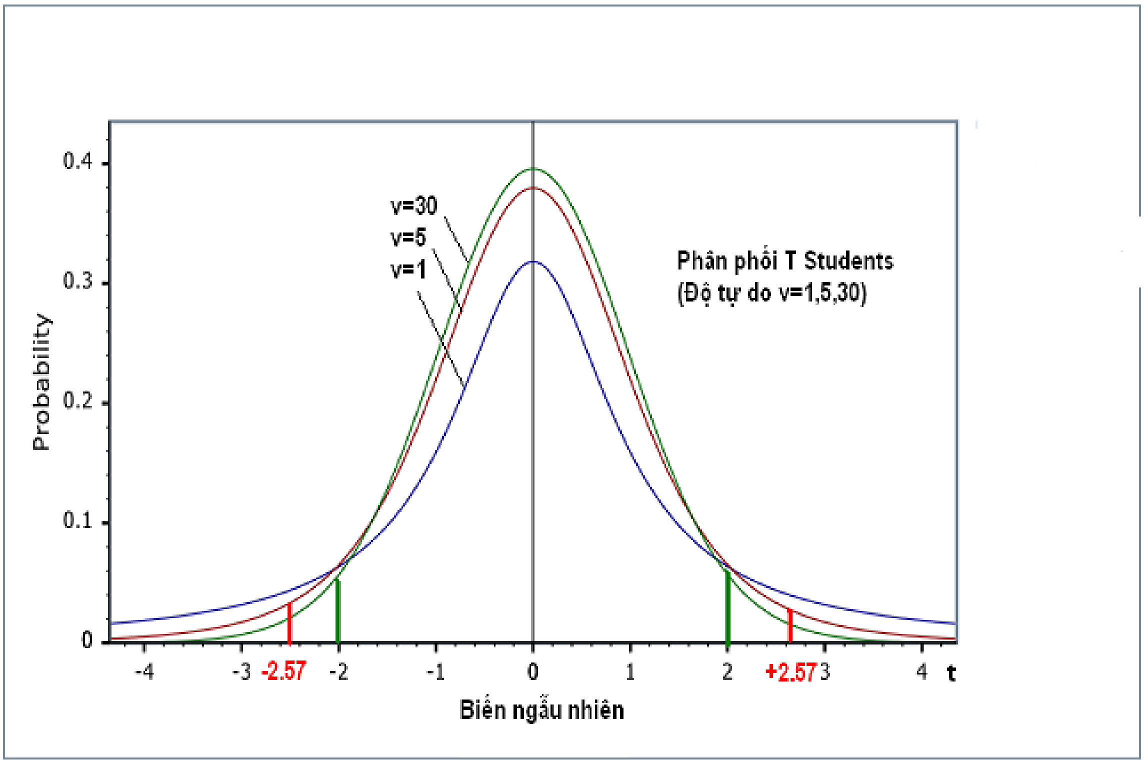
Công thức tính KTC 95%: m ± tα x SE (với $SE = \frac{SD}{\sqrt{N}}$)

Với m: trị trung bình và $SE = \frac{SD}{\sqrt{N}}$

Như vậy trị số μ của dân số (163cm) đều nằm trong KTC 95% của mẫu với N=5,10 và 20.

13.2 Phân phối T Student

Nếu phân phối chuẩn tắc có dạng **Z** ~ N (0,1) thì phân phối t có dạng **T** ~ (0, $\frac{v}{v-2}$), trong đó v là bậc tự do và $\frac{v}{v-2}$ là phương sai. như vậy khi v lớn (>30) thì $\frac{v}{v-2}$ gần bằng 1 và T có phân phối chuẩn tắc.



Sơđồ 13.1 Sự tương quan giữa phân phối chuẩn tắc N (0,1) và phân phối T (0, $\frac{v}{v-2}$)

Trong phân phối chuẩn, 95% số liệu nằm trong khoảng Z=-1,96 đến Z=+1,96 (# 2SD). Nếu bậc tự do v=1, 95% số liệu nằm trong khoảng tα=-12,706 đến tα=+12,706. Khi v=5 , 95% số liệu nằm trong khoảng tα=-2,570 đến tα=+2,570 và khi v=30, 95% số liệu nằm trong khoảng tα=-2 đến tα=+2. Như vậy, khi v≥ 30 thì phân phối T được coi như phân phối chuẩn tắc và có giá trị tới hạn tα # Zα=1,96

13.3 Ứng dụng phép kiểm T trong SPSS:

Phép kiểm T là phép kiểm được dùng nhiều nhất trong thống kê để xử lý các biến số. Trong các phần mềm thống kê thông dụng như Epi-info, SPSS, Strata... chúng ta chỉ thấy phép kiểm T mà không thấy phép kiểm Z (dựa trên phân phối chuẩn). Thực ra phép kiểm hay phân phối T được suy diễn từ phân phối chuẩn, với mẫu nhỏ (n=5, 10,15...) chúng ta chỉ cần hiệu chỉnh $Z\alpha=1{,}96$ ra $T\alpha$. Nếu mẫu càng nhỏ (bậc tự do nhỏ), $T\alpha$ càng lớn (xem biểu đồ 1)

13.3.1 Phép kiểm T một mẫu :

Ví dụ 1: Thực hiện ngoại kiểm tra, 5 mẫu đường máu (đều có trị số thực là 100mg%) được gởi cho 1 phòng xét nghiệm A. Kết quả 5 mẫu đường máu tại phòng xét nghiệm A như sau: **100; 101; 102; 103; 104**. Hỏi chất lượng của phòng xét nghiệm A?

Giải:

Giả thuyết không: Ho: m= μ ; Ha: m ≠ μ

$$T=\frac{m-\mu}{\frac{SD}{\sqrt{n}}}$$

$$\text{với } m=\frac{100+101+102+103+104}{5}=102$$

$$SD^2=\frac{(100-100)^2+(100-101)^2+(100-102)^2+(100-103)^2+(100-104)^2}{n-1}=2.5$$

SD=1.58

$$T=\frac{m-\mu}{\frac{SD}{\sqrt{n}}}=\frac{102-100}{\frac{1{,}58}{\sqrt{5}}}=2{,}82$$

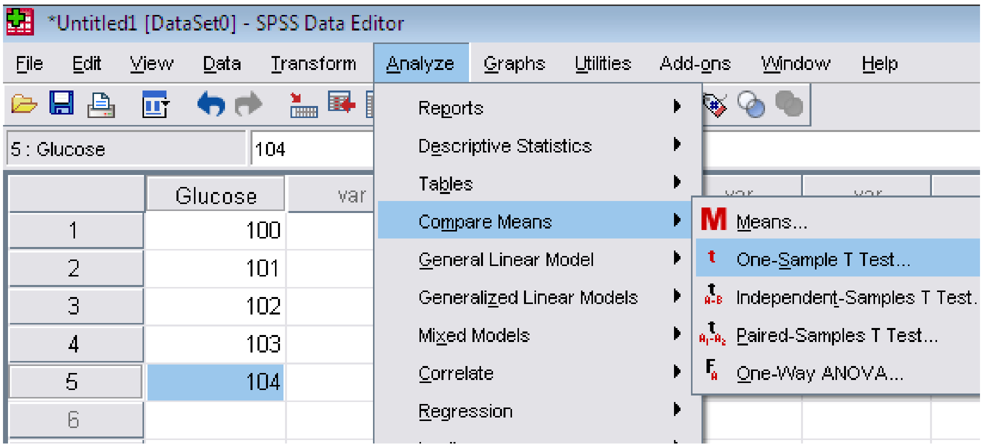
Tra bảng với bậc tự do =4 : t= 2.77. Như vậy T >2,77 → bác bỏ giả thuyết không, có sự khác biệt giữa mẫu máu gởi đến so với kết quả của phòng xét nghiệm A. Kết luận: Chất lượng phòng xét nghiệm A chưa đạt

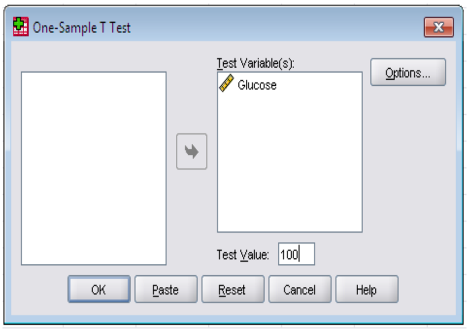
Test T 1 mẫu trong SPSS

Analyze>Compare Means>One-sample T test

Nhắp glucose chuyển qua ô Test variables

Gõ 100 (trị đường máu thực sự) vào ô Test Value





Nhắp OK

Kết quả kiểm định T 1 mẫu :

T-Test

One-Sample Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Glucose	5	102.00	1.581	.707

One-Sample Test

	Test Value = 100					
					95% Confidence Interval of the Difference	
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Lower	Upper
Glucose	2.828	4	.047	2.000	.04	3.96

N: số mẫu máu; Mean: trị trung bình; Std. Deviation: Độ lệch chuẩn; Std. Error Mean: Sai số chuẩn= SD/$\sqrt{N}$; t=2.828 (giá trị tới hạn t 2 đuôi); df: bậc tự do (n-1); Sig. (2-tailed): ý nghĩa TK (2 đuôi) p<0.047; Mean difference: Sai biệt giữa TB mẫu và trị lý thuyết (m-µ)

Kết luận: t=2,828, df=4, p=0,047: sự khác biệt có ý nghĩa thống kê, như vậy kết quả của phòng xét nghiệm A chưa đạt.

13.3. 2 T test 2 mẫu độc lập:

Ví dụ 2: Nghiên cứu số lượng tiểu cầu của 2 nhóm bệnh nhân (n=10) mắc sốt dengue (SD) và sốt xuất huyết dengue (SXH). Kết quả thu được như sau ($x10^3/mm^3$)

Nhóm SD: 150, 140, 170, 160, 90, 240, 100, 140, 120, 90

Nhóm SXH: 100, 130, 80, 70, 40, 30, 120, 130, 20, 80

Có sự khác biệt trung bình giữa 2 nhóm

Giải:

Giả thuyết Ho: $m_1=m_2$; Ha: $m_1 \neq m_2$

$$T = \frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{SE_1^2 + SE_2^2}}$$

$$m_1 = \frac{150 + 140 + 170 + 160 + 90 + 240 + 100 + 140 + 20 + 90}{10} = 140$$

$$m_2 = \frac{100 + 130 + 80 + 70 + 40 + 30 + 120 + 130 + 20 + 80}{10} = 80$$

$$SD_1^2 = \frac{(150 - 140)^2 + ... + (90 - 140)^2}{9} = 2044$$

$$SD_2^2 = \frac{(100 - 80)^2 + ... + (90 - 80)^2}{9} = 1504$$

$$SE_1^2 = \frac{SD_1^2}{n_1} = 204,5$$

$$SD_2^2 = \frac{SD_2^2}{n_2} = 163,8$$

$$T = \frac{|140 - 80|}{\sqrt{204,5 + 163,8}}$$

T= 3,124

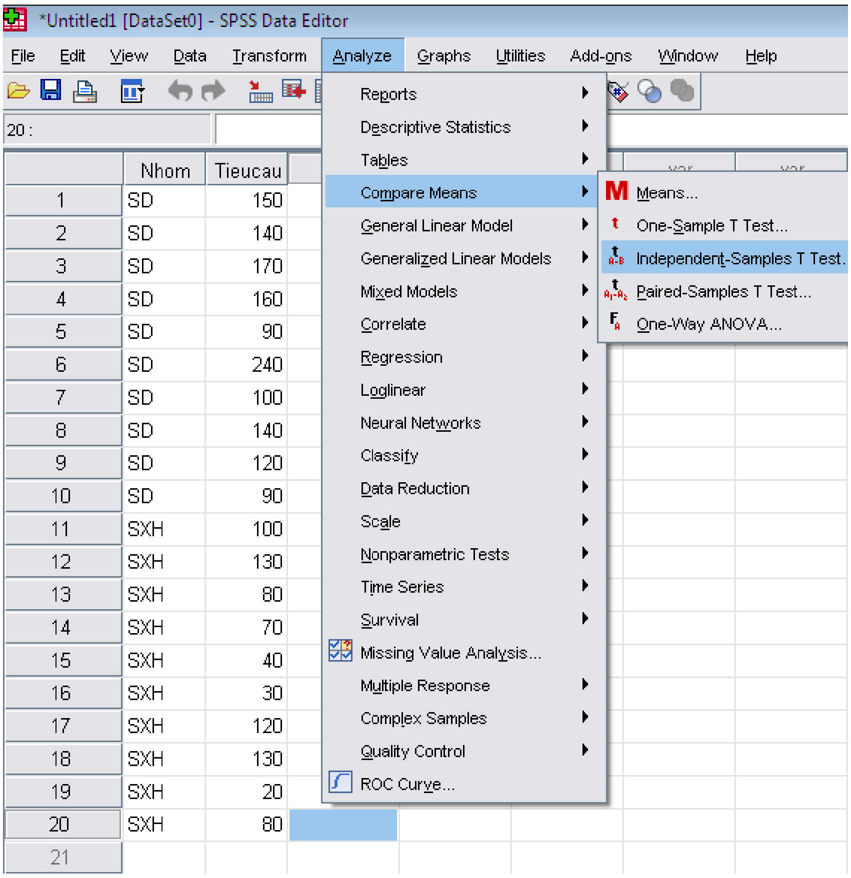
Với bậc tự do= 18 $T\alpha$= 2,101

Như vậy T=3,124 > $T\alpha$=(2,101 $\rightarrow$ bác bỏ Ho. Nhóm SD có tiểu cầu cao hơn SXH

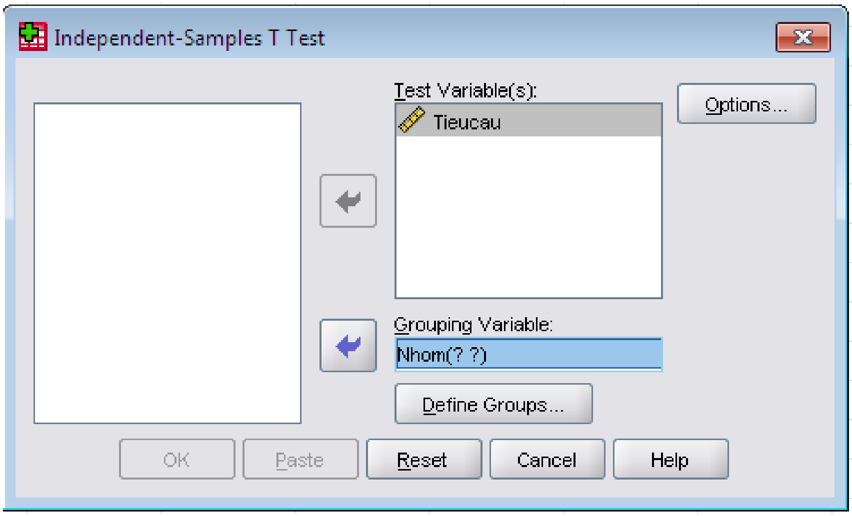
Test T 2 mẫu độc lập trong SPSS

Analyze>Compare Means>Independent-Samples T Test

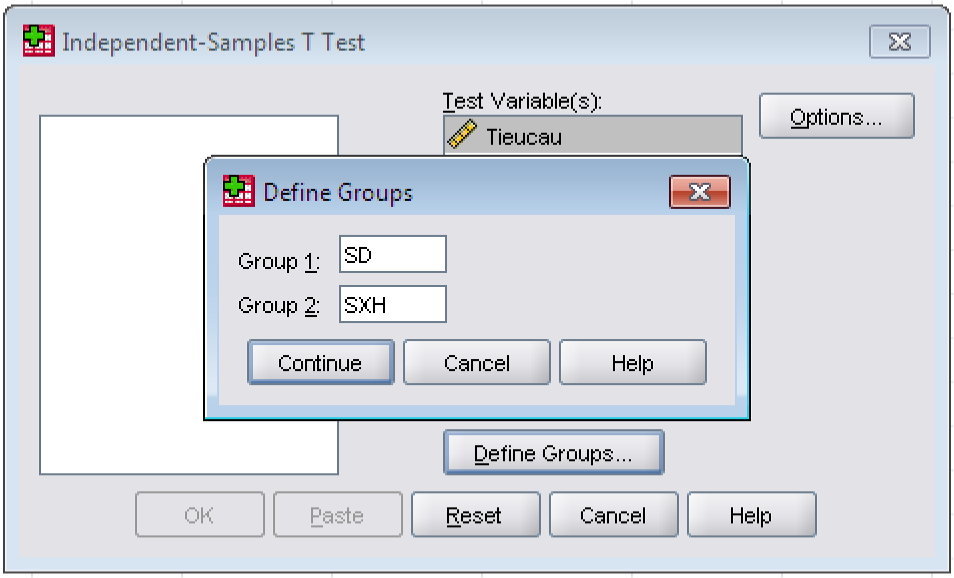
Nhắp trị TC (tiểu cầu) qua ô Test variables



Mở màn hình Independent-Samples T test. Nhắp chuẩn tieucau từ ô bên trái qua ô Test Variable(s) và Nhom qua ô Group Variable:



Nhắp nút Define Groups, khai báo group 1 =SD; group 2 = SXH



Nhắp Continue và nhắp OK, cho kết quả như sau:

T-Test

Group Statistics

	Nhom	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Tieucau	SD	10	140.00	45.216	14.298
	SXH	10	80.00	40.552	12.824

Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances				
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)
Tieucau	Equal variances assumed	.000	1.000	3.124	18	.006
	Equal variances not assumed			3.124	17.791	.006

N: số mẫu của mỗi nhóm; Mean: trị trung bình; Std. Deviation: Độ lệch chuẩn; Std. Error Mean: Sai số chuẩn= SD/$\sqrt{N}$; Levene's test for Equality of Variances: Kiểm định bằng nhau về phương sai (nếu sig>0,05, 2 nhóm có phương sai tương đương, chọn t ở hàng trên); df: bậc tự do= n1+n2-2=18, Sig. (2-tailed): ý nghĩa TK (2 đuôi) p=0.006.

Như vậy trị tiểu cầu của nhóm SD là: 140.00 ± 45.21 và nhóm SXH là: 80.00 ± 40.55 và sự khác biệt của 2 nhóm có ý nghĩa thống kê với p=0,006.

13.3.3 Kiểm định T với mẫu bắt cặp:

Ví dụ: Điều trị 8 bệnh nhân bằng thuốc hạ máu X, kết quả trước và sau điều trị như sau:

Trước ĐT	160	155	145	150	145	150	165	170
Sau ĐT	145	135	145	150	130	130	135	150
Chênh lệch	15 +	20 +	0 +	0 +	15 +	20 +	30 +	20 =120

Giá trị trung bình của các chênh lệch: $\bar{d} = \frac{120}{8} = 15$

Phương sai của các chênh lệch :

$$SD_{d}^{2} = \frac{(15-15)^2 + (20-15)^2 + (15-15)^2 + (20-15)^2 + (30-15)^2}{7} = \frac{(20-15)^2}{7} = 107{,}2$$

$S_{\bar{d}} = \sqrt{107{,}2}$ = 10,35

Ta có

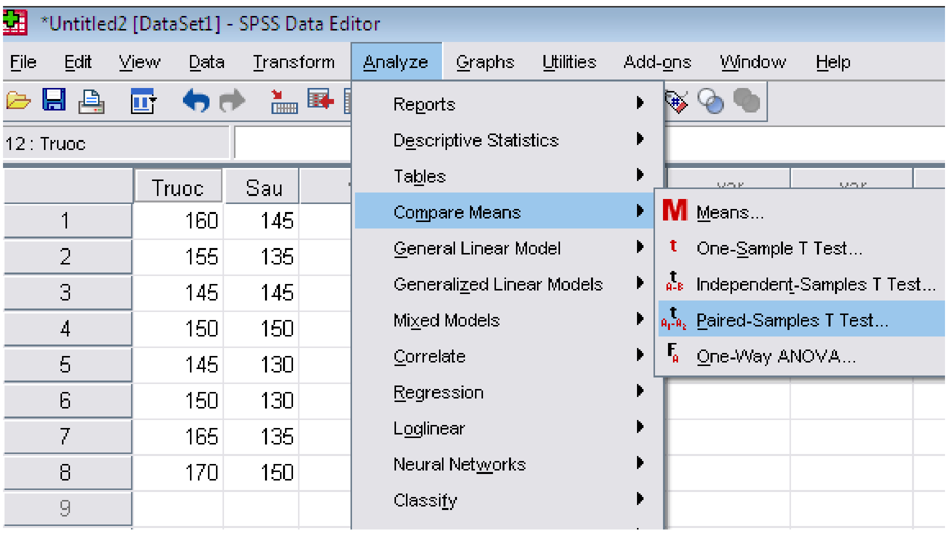
$$T = \frac{\bar{d}}{\frac{SD}{\sqrt{n}}} = \frac{15}{\frac{10{,}35}{\sqrt{8}}} = 4{,}09$$

Với df=7, tα=0,025= 2,36

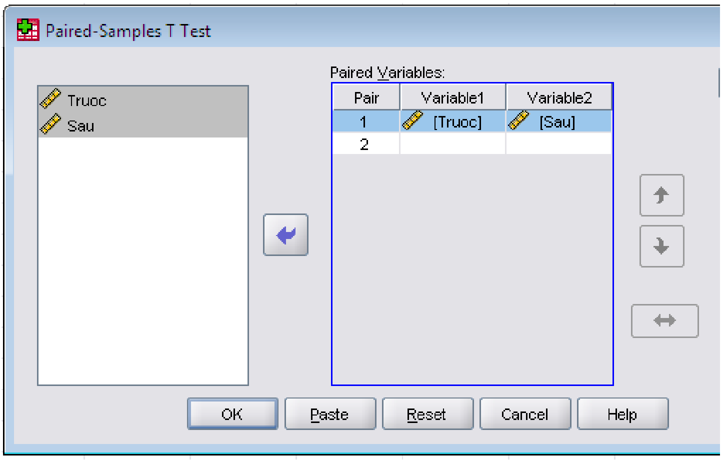
Kết luận : T >2,36 → bác bỏ Ho: có sự chênh lệch HA sau điều trị (thuốc X có tác dụng hạ huyết áp thực sự)

Test T mẫu bắt cặp trong SPSS

Analyze>Compare Means>Paired-Samples T Test



Mở màn hình Paired-Samples T test, bôi cặp Truoc-Sau cùng lúc bằng phím Shift+ ↓ chuyển qua ô Paired Variables:



Nhắp OK cho kết quả như sau:

T-Test

Paired Samples Statistics

		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	Truoc	155.00	8	9.258	3.273
	Sau	140.00	8	8.452	2.988

Paired Samples Correlations

		N	Correlation	Sig.
Pair 1	Truoc & Sau	8	.320	.440

Paired Samples Test

		Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
					95% Confidence Interval of the Difference				
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	Lower	Upper			
Pair 1	Truoc - Sau	15.000	10.351	3.660	6.346	23.654	4.099	7	.005

Độ chênh lệch trung bình=15; độ lệch chuẩn (SD)=10,35

t=4,099, bậc tự do df=7, ý nghĩa thống kê: p=0,005

Sự khác biệt Trước và Sau điều trị có ý nghĩa thống kê. Kết luận thuốc X có tác dụng hạ áp tốt.

Tài liệu tham khảo:

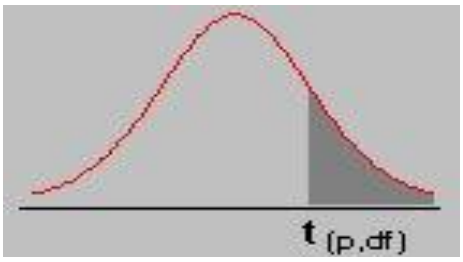
1. Tonse N.K. Raju. William Sealy Gosset and William A. Silverman**:** Two "Students" of Science**.** Pediatrics,Vol. 116 No. 3 2005, pp. 732-735.

2. Student's *t*-Tests http://www.physics.csbsju.edu/stats/t-test.html truy cập ngày 20/02/09.

3. Bộ Y tế 2002. Bản thảo hằng số sinh học người Việt nam thập kỷ 90

Phụ lục:

Bảng tính giá trị tới hạn của phân phối T



Ví dụ . với bậc tự do DF=5, xác suất p (2 đuôi)=0,05, thì t=2,57

với bậc tự do DF=5, xác suất p (2 đuôi)=0,01, thì t=4,03

DF	0,05	0,01
1	12.71	63.66
2	4.3	9.92
3	3.18	5.84
4	2.78	4.6
5	2.57	4.03
6	2.45	3.71
7	2.36	3.5
8	2.31	3.36
9	2.26	3.25
10	2.23	3.17
11	2.2	3.11
12	2.18	3.05
13	2.16	3.01
14	2.14	2.98
15	2.13	2.95

DF	0,05	0,01
17	2.11	2.9
18	2.1	2.88
19	2.09	2.86
20	2.09	2.85
21	2.08	2.83
22	2.07	2.82
23	2.07	2.81
24	2.06	2.8
25	2.06	2.79
26	2.06	2.78
27	2.05	2.77
28	2.05	2.76
29	2.05	2.76
30	2.04	2.75
∞	1.96	2.58